Université Moulay Ismaïl

Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers — Meknès

CONCOURS D'ENTREE en 1ère Année

Filière : Sciences Expérimentales et Techniques

Epreuve de Mathématiques

Vendredi 22/07/05 - Durée : 3h 24mn

Exercice I : Fonctions numériques

Q 01. La fonction f est définie par $f(x) = x + x^2 + x^3$. Montrer que pour $|x| \leq 1$ on a $|f(x)| \leq 3|x|$. **(1Pt)**

Q 02. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$. **(1Pt)**

Q 03. Déterminer la dérivée g' de la fonction g définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x^2+1}}$. **(1Pt)**

Q 04. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-1}^{0} t\sqrt{t+2}\, dt$. **(2Pts)**

Q 05. Donner un exemple d'une fonction dérivable en 1 de dérivée nulle mais n'admettant pas d'extremum relatif en 1. **(1Pt)**

Q 06. On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = x^4 - 2x^2$. Déterminer l'expression de f^{-1}. **(2Pts)**

Q 07. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(x) = (x+2)\left(1 + e^{(-x/2)}\right)$. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, on note $\mathcal{A}(a)$ l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan délimitée par la courbe (C) de f, la droite d'équation $y = x + 2$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$. Calculer $\mathcal{A}(a)$. **(2Pts)**

Exercice II : Suites numériques

Q 08. La somme de trois nombres en progression arithmétique est 30, et leur produit est 910. Quels sont ces nombres ? **(1Pt)**

Q 09. Quelles sont les suites qui sont à la fois arithmétiques et géométriques ? (justifier) **(1Pt)**

Q 10. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{t+1} dt$

a) Démontrer que (u_n) est décroissante. **(1Pt)**

b) Montrer que (u_n) est convergente et donner sa limite. **(2Pts)**

Q 11. On considère un segment $[A, B]$ de longueur a. Soient M_1 le milieu de $[A, B]$, M_2 le milieu de $[B, M_1]$, M_3 le milieu de $[M_1, M_2]$ et M_4 le milieu de $[M_2, M_3]$ etc. Pour tout entier naturel n, M_{n+2} est le milieu de $[M_n, M_{n+1}]$. Exprimer la longueur AM_n en fonction de n et étudier la position limite de M_n quand n tend vers $+\infty$ **(3Pts)**

Exercice III : Equations à résoudre

Q 12. Déterminer $\sin(\pi/8)$ et $\cos(\pi/8)$ en utilisant seulement les formules trigonomitriques. **(1Pt)**

Q 13. Déterminer 3 racines du polynôme P qui vérifie $(x+3)P(x) = xP(x+1)$. **(2Pts)**

Q 14. Démontrer qu'il existe un polynôme P de degré trois admettant le minimum 0 en 0 et le maximum 1 en 1. **(1Pt)**

Q 15. Résoudre dans $I\!R$: $3+\sqrt{2x^2-4x+9} = 2x$. **(1Pt)**

Q 16. Déterminer l'ensemble des réels x vérifiant : $\sin x \times \cos x \times tgx = 1$. **(1Pt)**

Exercice IV : Représentation graphique

Q 17. Résoudre graphiquement : $2|x| - 3|y| \geq 6$. **(1Pt)**

Q 18. Soit f de $[0,1[$ dans $I\!R$ telle que

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ \forall n \in I\!N^*, \quad \forall x \in \left[\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right[\; f(x) = \dfrac{1}{n+1} \end{cases}.$$

Représenter graphiquement f dans un plan orthonormal. **(1Pt)**

Q 19. Dans un repère orthonormal du plan, on considère les points $A(-1,-2)$ et $B(-3,4)$. Tracer le cercle de diamètre $[A,B]$. **(2Pts)**

Exercice V : Complexes

Q 20. Soient $z_1 = (3+3i)+(5+2i)$, $z_2 = \overline{(6+2i)} - (2-5i)$, $z_3 = 4e^{3i\pi/5}+1$, $z_4 = \frac{1}{2}e^{i\pi/4} + 2e^{-i\pi/4}$. Calculer et représenter graphiquement :

a) $a = z_1 + z_3$. **(1Pt)**
b) $b = z_2 + z_4$. **(1Pt)**
c) $c = \frac{1}{2}z_2 + \frac{5}{3}z_1$. **(1Pt)**

Q 21. Soient z_1, z_2 et z_3 des nombres complexes quelconques. Montrer que

a) $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$ **(1Pt)**
b) $|z_1+z_2+z_3| \leq |z_1|+|z_2|+|z_3|$ **(1Pt)**
c) $|z_1-z_2| \geq |z_1|-|z_2|$ **(1Pt)**

Q 22. Un nombre z est appelé algébrique s'il est solution d'une équation algébrique

$$a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n = 0 \qquad \text{où } a_0, \cdots, a_n \text{ sont des entiers.}$$

Montrer que $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ et $\sqrt[3]{4}-2i$ sont algébriques. **(2Pts)**

Exercice VI : Divers

Q 23. On dispose de 100 m de clôture pour délimiter un enclos rectangulaire. Quelles dimensions donner à l'enclos pour que celui-ci délimite une aire maximale ? **(1Pt)**

Q 24. Un magasin de location vidéo propose trois options :

Option 1 : abonnement 200 DH et 9 DH par cassette.

Option 2 : sans abonnement et 20 DH par cassette.

Option 3 : carte donnant droit à au plus 11 cassettes 200 DH

a) Calculer en fonction du nombre n de cassettes louées le prix total payé avec chacune des options. **(1Pt)**

b) Quelle est l'option la plus intéressante ? **(1Pt)**

Q 25. Une urne contient 20 boules : 13 vertes et 7 rouges. On tire successivement 3 boules au hasard, avec remise de la boule tirée. Quelle est la probabilité :

a) d'obtenir dans l'ordre deux rouges et une verte (événement RRV) ? **(1Pt)**

b) d'obtenir sans tenir compte de l'ordre deux rouges et une verte ? **(1Pt)**

Q 26. Un étudiant ensamien a dans sa poche 10 pièces de monnaie : 4 pièces 1 DH, 4 pièces 0.50 DH et 2 pièces 0.20 DH. Pour acheter un sandwitch de 3.7 DH. Il tire de sa poche au hasard 5 pièces.

c) Quelle est la probabilité qu'il obtienne exactement 3.7 DH ? **(1Pt)**

d) Quelle est la probabilité qu'il obtienne une somme suffisante pour payer son achat ? **(2Pts)**

Q 27. Démontrer que tout entier n supérieur ou égal à 24 peut s'écrire sous la forme : $\exists (a, b) \in I\!N \times I\!N$ / $n = 5a + 7b$. **(2Pts)**

Q 28. Quelles doivent être les dimensions d'une boîte cylindrique de volume $1,6\ dm^3$ pour que sa surface totale soit minimale. **(2Pts)**

Q 29. Pour quoi le raisonnement suivant est vrai ou faux ? *Soit à démontrer que pour tout entier naturel n, $10^n + 1$ est divisible par* 9. On a $10^{n+1} + 1 = 10 \times 10^n + 1 = (9 + 1)\,10^n + 1 = 9 \times 10^n + 10^n + 1$. Donc si $10^n + 1$ est divisible par 9, il en est de même de $10^{n+1} + 1$ ce qui prouve le résultat. **(1Pt)**